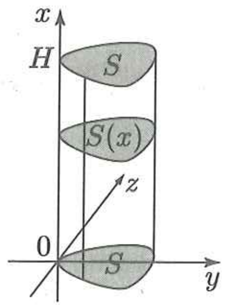


Рис. 338

Тогда по формуле (107) находим

$$V = \int_0^H S\,dx = SH.$$

Раздел VII
Числовые последовательности. Прогрессии

7.1. Числовые последовательности

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие единственное действительное число a_n. Изобразим это соответствие стрелкой:

$$n = 1 \to a_1; \quad n = 2 \to a_2; \quad n = 3 \to a_3; \quad \ldots$$
$$\ldots n = k-1 \to a_{k-1}; \quad n = k \to a_k; \quad \ldots$$

В этом случае говорят, что задана числовая последовательность

$$\{a_n\}; \quad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_n, \ldots,$$

где a_1 — первый член; a_2 — второй член; a_k — k-й член; a_n — n-й или, что то же самое, общий член последовательности.

Другими словами, *числовой последовательностью* называется функция, заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Для числовых последовательностей приняты обозначения $(a_n), (b_n)$, $x_n, y_n, \ldots, f(n), \ldots$ и т. п. Задать числовую последовательность можно следующими основными способами.

Аналитический способ задания последовательности — в этом случае последовательность задается формулой общего члена, подставляя в которую вместо n натуральные числа $1, 2, 3, \ldots$, будем получать идущие друг за другом (*последовательные*) члены последовательности.

Например:

1) $a_n = n^2 - n$; члены последовательности: $0, 2, 6, 12, \ldots$;
2) $b_n = \dfrac{1}{n^3}$; члены последовательности: $1, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{64}, \ldots$;
3) $c_n = (-1)^{n+1}$; члены последовательности: $1, -1, 1, -1, \ldots$.

Рекуррентный (или *возвратный*) *способ задания* состоит в том, что для вычисления n-го члена последовательности требуется знать все предыдущие её члены: $a_{n+k} = f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Другими словами, все последующие члены последовательности вычисляются по известным предшествующим её членам.

Рассмотрим, например, числовую последовательность, в которой $a_1 = 0$, $a_2 = 5$, и для каждого следующего члена a_{n+2} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ выполняется соотношение

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 10a_n^2. \qquad (1)$$

Равенство (1) называется рекуррентным (или возвратным) соотношением и позволяет определять каждый член последовательности, начиная с третьего, через два предшествующих ему члена. Так, полагая в равенстве (1) $n = 1$ и $n = 2$, получаем

$$a_3 = a_2 + 10 \cdot a_1^2 = 5 + 10 \cdot 0^2 = 5; \quad a_4 = a_4 + 10 \cdot a_2^2 = 5 + 10 \cdot 5^2 = 255.$$

Пример 1. Рассмотрим более сложную последовательность десятичных знаков в представлении обыкновенной дроби $\frac{17}{165}$ в виде десятичной дроби:

$$\frac{17}{165} = 0{,}103030303\ldots = 0{,}1(03).$$

Здесь $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 3$, $a_4 = 0$, $a_5 = 3$, $a_6 = 0$, $a_7 = 3$, $a_8 = 0$, $a_9 = 3$, … и поэтому $a_{n+3} = a_{n+1}$ для $n > 1$. Таким образом, получаем $a_1 = 1$; $a_2 = 0$; $a_3 = 3$; $a_{n+3} = a_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. С помощью этих условий можно найти все последующие члены последовательности. А именно: при $n = 1$ найдём $a_{1+3} = a_{1+1} = a_2 = 0$, т. е. $a_4 = 0$; далее, при $n = 2$ найдём $a_{2+3} = a_{2+1} = a_3 = 3$, т. е. $a_5 = 3$ и т. д.

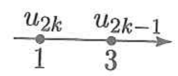
Некоторые последовательности не удаётся задать ни аналитическим, ни рекуррентным соотношением. Тогда прибегают к *словесному способу задания*.

Пример 3. Рассмотрим последовательность p_n простых чисел, считая p_n n-ым простым числом. Получим последовательность:

$$2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ \ldots$$

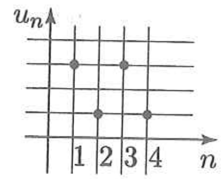
Любую числовую последовательность (u_n) можно геометрически представлять и изображать в виде точек числовой прямой (рис. 339).

График числовой последовательности как функции, определенной на множестве натуральных чисел, состоит из изолированных точек, координаты которых $(n; u_n)$ (рис. 340).



$k = 1, 2, 3, \ldots$

Рис. 339



$u_1 = 3,\ u_2 = 1,\ u_3 = 3,\ u_4 = 1,\ \ldots$

Рис. 340

7.2. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \qquad (2)$$

содержащая конечное или бесконечное число членов, у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с постоянным числом d, называемым *разностью* арифметической прогрессии.

Определение арифметической прогрессии можно записать в эквивалентной форме: числовая последовательность (2) называется *арифметической прогрессией*, если для любого натурального n выполняется равенство $a_{n+1} = a_n + d$ где a_n и d — произвольные числа. При этом a_n называется *n-м* (или *общим*) *членом* арифметической прогрессии, а число d — ее *разностью*.

Из определения следует, что числовая последовательность a_n является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого натурального числа n разность $a_{n+1} - a_n$ равна числу, не зависящему от n.

Арифметическая прогрессия задана, если заданы ее первый член a_1 и разность d. Поэтому арифметическую прогрессию обычно записывают в виде

$$a,\ a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots,$$

где $a_1 = a$.

Примеры арифметических прогрессий:

1) $0, 0, 0, \ldots$ $(a_1 = d = 0)$;
2) $7, -23, -53, -83, \ldots$ $(a_1 = 7;\ d = -30)$;
3) $\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \ldots$ $(a_1 = \sqrt{2};\ d = 4\sqrt{2})$.

7.3. Основные свойства арифметической прогрессии

1. *Формула n-го (общего) члена арифметической прогрессии:*

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{3}$$

2. *Характеристическое свойство арифметической прогрессии**:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

т. е. *каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому его соседних членов.*

3. Если арифметическая прогрессия содержит n членов $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $\ldots, a_n$, то сумма членов прогрессии, равноотстоящих от ее концов, равна сумме ее крайних членов:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

4. *Количество членов арифметической прогрессии, расположенных между ее членами a_k и a_m (где $k < m$), равно*

$$m - k - 1, \tag{6}$$

а количество ее членов, начиная с a_k по a_m включительно, равно

$$m - k + 1. \tag{7}$$

5. *Если a_k и a_m — два произвольных члена арифметической прогрессии ($k \neq m$), то для разности прогрессии справедлива формула*

$$d = \frac{a_k - a_m}{k - m}. \tag{8}$$

6. *Сумму первых n членов арифметической прогрессии, т. е.*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

*Числовая последовательность, обладающая этим *характеристическим* свойством, является арифметической прогрессией и, наоборот, каждый член арифметической прогрессии этим *характеристическим* свойством обладает. Не всякое свойство арифметической прогрессии является характеристическим. Например, свойство 3 характеристическим не является.

можно найти по одной из формул

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \tag{9}$$

или

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \tag{10}$$

При решении задач на арифметическую прогрессию полезно знать основные примеры арифметических прогрессий.

- *Значения линейной функции $y = ax + b$ при последовательных натуральных значениях x образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна a.*

- *Последовательные натуральные числа, дающие один и тот же остаток при делении на натуральное число a, образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна a.*

Действительно, натуральное число y, дающее при делении на *натуральное число a* остаток r, имеет вид $y = an + r$. Но числа $an + r$ являются значениями линейной функции $y = ax + r$ при натуральных значениях x и поэтому образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной a.

Пример 1. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 8.

Решение. Числа, делящиеся на 8, образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 8. Первое трехзначное число, делящееся на 8, находим с помощью проб, начиная со 100. Это число 104. Число 1000 делится на 8, но оно четырехзначное. Значит, число $1000 - 8 = 992$ есть наибольшее трехзначное число, делящееся на 8.

Чтобы воспользоваться формулой (9) для суммы n первых членов арифметической прогрессии, нужно найти число членов прогрессии, у которой известны ее первый член $a_1 = 104$, последний член $a_n = 992$ и разность $d = 8$. Для нахождения числа n используем формулу (3):

$$992 = 104 + (n-1)8 \Leftrightarrow n = 112.$$

Теперь по формуле (9) найдем

$$S_{112} = \frac{104 + 992}{2} \cdot 112 = 61\,376.$$

Совет. При решении задач на арифметическую прогрессию часто бывает полезно записать условие задачи, используя первый член прогрессии и ее разность.

Пример 2. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, у которой седьмой член равен 7 и двенадцатый член равен 5.

Решение. По свойству 2 имеем $a_7 = a_1 + 6d$ и $a_{12} = a_1 + 11d$ и по условию получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 6d = 7, \\ a_1 + 11d = 5. \end{cases}$$

Решая систему найдём $a_1 = 9{,}4$; $d = -0{,}4$.

Ответ: $a_1 = 9{,}4$; $d = -0{,}4$.

Пример 3. Сумма десяти первых членов арифметической прогрессии равна 110, и её сотый член равен 200. Найдите первый член этой прогрессии.

Решение. По свойству 6 имеем $S_{10} = \dfrac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$ и $a_{100} = a_1 + 99d = 200$ и по условию получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 10a_1 + 45d = 110, \\ a_1 + 99d = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9d = 22, \\ a_1 + 99d = 200. \end{cases}$$

Решая систему найдём $a_1 = 2$.

Ответ: $a_1 = 2$.

Пример 4. Первый член не постоянной арифметической прогрессии равен 0. Найдите отношение сорок третьего её члена к пятнадцатому.

Решение. По свойству 2 имеем $a_{43} = a_1 + 42d$ и $a_{15} = a_1 + 14d$. По условию $d \neq 0$, $a_1 = 0$. Получаем $a_{43} = 42d$, $a_{15} = 14d$. Поэтому искомое отношение $\dfrac{a_{43}}{a_{15}} = \dfrac{42d}{14d} = 3$.

Ответ: 3.

7.4. Дополнительные свойства арифметической прогрессии

1°. Пусть требуется установить, являются ли числа 16687 и 21342 членами арифметической прогрессии, первый член которой равен 7, а разность равна 24.

Воспользуемся формулой (3) общего члена прогрессии (см. п. 7.3). Выясним, какое из двух равенств

$$16687 = 7 + (n-1)24, \quad 21342 = 7 + (n-1)24$$

может быть верным при некотором натуральном n.

Из первого равенства находим $n = 696$. Откуда число $16687 = a_{696}$. Второе равенство не выполняется ни при одном натуральном n и, значит, число 21342 не является членом данной арифметической прогрессии.

Число t является членом арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d, если существует натуральное число n такое, что верно равенство $t = a_1 + (n-1)d$, причем это число n есть номер члена a_n, равного t.

2°. Пусть заданы три числа a, b, c. Могут ли эти числа являться членами, необязательно последовательными, одной и той же арифметической прогрессии? В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен. Возьмем, например, числа 1, 1, 2. Если они являются членами одной и той же арифметической прогрессии, то, поскольку первые два числа одинаковы, разность этой прогрессии должна быть равна нулю. Но тогда все ее члены должны быть равны 1 и среди членов этой прогрессии не может оказаться число 2. Итак, данные числа не являются членами одной и той же арифметической прогрессии.

Рассмотрим произвольные, но различные (попарно) числа a, b, c. Чтобы они являлись членами одной и той же арифметической прогрессии x_n, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие натуральные числа m, n, k, чтобы выполнялись равенства

$$a = x_1 + (m-1)d, \quad b = x_1 + (n-1)d, \quad c = x_1 + (k-1)d,$$

где x_1 и d — некоторые постоянные числа.

Тогда, вычитая из первого равенства второе и из второго третье, получаем

$$a - b = (m-n)d, \quad b - c = (n-k)d.$$

Отсюда следует:

если три попарно различных числа a, b, c являются членами одной и той же арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда отношение $\dfrac{a-b}{b-c}$ является рациональным числом.

Обратно, пусть числа a, b, c попарно различны и, например, $a > b > c$ и пусть $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a-b}{b-bc}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда числа a, b, c являются членами арифметической прогрессии (x_n), первый член которой $x_1 = a$, а разность прогрессии $d = \dfrac{b-a}{p}$. В самом деле,

$$x_{p+1} = a + (p+1-1)\frac{b-a}{p} = a + p\frac{b-a}{p} = a + b - a = b$$

и